数理解析研究所講究録
238巻 1975年 1-59



# 楕円型境界値問題の理論とその応用

名大・理・数　　柏原正樹
京大・数理研　　河合隆裕

本稿は"線型微分方程式系の超函数解は境界上のmicrofunctionとどのように関係するか?"という問題を，楕円型方程式系の場合に，詳しく調べることを目標とする。§1ではまず，境界が余次元1の場合に，議論を展開する。この場合，特に境界で退化する単独方程式の理論も適宜比較しながら論を進める。すべての議論を退化する方程式の場合の理論に還元して展開することも可能であろうが，そこ迄徹底はさせなかった。技術的に面倒であるのが主因である。§2では§1の理論の応用のいくつかについて触れる。実領域における線型(擬)微分方程式系の解の様相を調べる際，"境界値問題"を用いることの有用性がよく理解されると思う。§3では，§2の議論を更に精密化する際に必要とされる"余次元が1より大"の境界に対する境界値問題に対して，(境界で非退化の場合に)問題の定式化とその証明を与える。全体として[S-K-K]は予備知識として仮定する。[S-K-K]に陽には述べられていないが，本稿で重要な役割を果たすのは，層$\mathcal{C}_{N/X}$(定義1.4.)である。

§1.

この節では余次元1の場合の楕円型境界値問題を論じる。問題は局所的に定式化することが出来るから，

$$M=\mathbb{R}^n \supset N=\{(x_1, x')\in\mathbb{R}^n ;\ x_1=0\}$$

とし，$X$, $Y$ を各々 $M$, $N$ の複素化とする。$M_\pm=\{x\in M;\ x_1 \gtrless 0\}$ として，$M$で定義された楕円型方程式系 $\mathcal{M}$ の $M_\pm$ における超函数解の境界値を考えることが目標である。以下 $Z_\pm = M_\pm \sqcup N$ と定める。

今 $\mathcal{M}$ を楕円型微分方程式系（以下"線型"は常に仮定されるので省略する。）とすれば，定義により，

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{P} \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}}{\otimes} \mathcal{M}) \cap \sqrt{-1}\,S^*M = \phi$$

である。（以下しばしば $\mathcal{P}\underset{\pi^{-1}\mathcal{D}}{\otimes}$ は略する。別に誤解は起らないだろう。）

他方，$N$が余次元1故，$\mathcal{M}$が楕円型ならば，$\mathrm{Supp}(\mathcal{P}\underset{\pi^{-1}\mathcal{D}}{\otimes}\mathcal{M}) \cap P^*_Y X=\phi$，即ち，$\mathcal{M}$に関して$Y$が非特性的であることに注意しよう。ここで"非特性的"という概念は，$M$, $N$ の実多様体としての構造には関係しない物である。これに対して"楕円型"という概念は$M$の実構造に依存する。従って，議論もこの2つの概念を区別して進められる。即ち，$M_\pm$での$\mathcal{M}$の超函数解が$N$で必らず境界値を持つこと，の証明の部分には$\mathcal{M}$の楕円性

は必要とされないけれど、そのN上の境界値と（たとえば）$M_+$での$\mathcal{M}$の解との対応をつける段階で$\mathcal{M}$の楕円性が有効に用いられる。

実際、$N$を一般に余次元$d$として，$Y$が$\mathcal{M}$に関して非特性的，即ち $\mathrm{Supp}(\mathcal{P} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}} \mathcal{M}) \cap P^*_Y X = \emptyset$ ならば，次の同型が成立する。

定理 1.1.
$$\mathbb{R}\Gamma_N \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M};\mathcal{B}_M) \otimes \omega_{N/M} \xleftarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y;\mathcal{B}_N)[-d] \tag{1.1}$$

ここに $\omega_{N/M} = \mathcal{H}^d_N(\mathbb{Z}_M)$，又，$\mathcal{M}_Y$は$\mathcal{M}$の$Y$での接方程式系，即ち $\mathcal{M}_Y = \mathcal{D}_{Y\to X} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} = \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$.
(S-K-K Ch. II. Cor. 3.5.8.)

この定理は，本質的には次のより一般な定理の系である。

定理 1.2. $\varphi: Y \to X$を$\mathcal{M}$に関して非特性的とすれば，次の同型が成立する。

$$\varphi^* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M},\mathcal{P}_X)[\dim X] \xleftarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{P}_Y)[\dim Y] \tag{1.2}$$

（$\mathcal{P}$は$\mathcal{D}$で置き換えてもよい。）

(S-K-K Ch. II. Th. 3.5.6.)

ここで$\mathcal{M}$を単独方程式 $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$ として定理1-1の

定理 1.2 から 定理1.1 を導いておこう。

定理1.2 を $\mathcal{P} \in \mathcal{D}$ に置き換えたものは,

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X) \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{D}_Y)[-d]$$

に他ならない。

これに $\underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes}\mathcal{O}_Y$ を施して

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{X\leftarrow Y}) \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_Y = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{D}_Y) \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_Y[-d]$$

故に

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_Y) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)[-d]$$

ここで

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} = \mathcal{D}_X / (\mathcal{D}_X z_1 + \cdots + \mathcal{D}_X z_d) \\ \mathcal{O}_Y = \mathcal{D}_Y / \left(\mathcal{D}_Y \frac{\partial}{\partial z_{d+1}} + \cdots + \mathcal{D}_Y \frac{\partial}{\partial z_n}\right) \end{cases}$$

故 $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_Y = \mathcal{D}_X / \left(\mathcal{D}_X z_1 + \cdots + \mathcal{D}_X z_d + \mathcal{D}_X \frac{\partial}{\partial z_{d+1}} + \cdots + \mathcal{D}_X \frac{\partial}{\partial z_n}\right)$

$$= \mathcal{H}^d_Y(\mathcal{O}_X)$$

故に

$$\mathbb{R}\Gamma_N \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{O}_Y)$$

$$= \mathbb{R}\Gamma_N \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{H}^d_Y(\mathcal{O}_X))$$

$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_N \mathbb{R}\Gamma_Y(\mathcal{O}_X))[d]$$

$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{H}^n_N(\mathcal{O}_X))[d-n]$$

他方

$$\mathbb{R}\Gamma_N \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{O}_Y)$$

$$= \mathbb{R}\Gamma_N \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)[-d]$$

$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathbb{R}\Gamma_N(\mathcal{O}_Y))[-d]$$

$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{H}^{n-d}_N(\mathcal{O}_Y)[d-n])[-d]$$

よって

$$\mathbb{R}\Gamma_N \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)$$

$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{B}_N)[-d]$$

これは 定理1.1 に他ならない。

意味を考えてみよう。今 $P$ の階数を $m$ とすれば,

$$\mathcal{M}_Y \simeq (\mathcal{O}_Y)^m$$

従って $$\mathcal{E}xt^j_N(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M) \simeq \begin{cases} \mathcal{B}_N^m & j=1 \\ 0 & j\neq 1 \end{cases}.$$

更に今 $P$ は楕円型故 特に局所可解, 即ち,

$$\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)=0 \quad j\neq 0$$

が成立するから, (1.1)式は, $M_\pm$ での $\mathcal{M}$ の超函数解の境界値の差が $N$ 上の超函数の $m$ ケの組と対応していることを意味している。この対応は, 元来, たとえば $M_+$ での $\mathcal{M}$ の超函数解を, $\mathcal{B}$ の flabbiness により $M_-$ では $0$ になるように拡張した時 $N$ 上に現われる余りの項をどこ迄"正規化"できるか, という一種の除法の問題を解くことにより得られたのであった。では, $P$ が $N$ で退化する場合にもそのような対応は得られないか, と考える。実は, この時も, $P$ が $N$ で確定特異点型である場合, 即ち $P = x_1^m P_m(x, D_x) + x_1^{m-1} P_{m-1}(x, D_x) + \cdots$ ($P_j(x,D)$ は高々 $j$ 階の微分作用素) という型であって $N$ が $P_m$ について非特性的であれば"一般には"議論は容易である。実際 $P$ の $(0, x', (1,0)\infty)$ における決定方程式の根 $\lambda_j(x')$ ($j=1,\cdots,m$) に対して $\lambda_j(x') - \lambda_k(x') \notin \mathbb{Z}$ ($j \neq k$) と仮定すれば, 非退化の場合と同様の操作を行った時 $N$ 上に残

る剰余項の処理は容易に行い得る。何故なら次の定理 1.3，又はその双対命題，定理 1.3′ が成立つからである。

定理 1.3　もし $\lambda_j(x') \notin \mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \cdots\}$ ならば，

$$P : \mathcal{A}_N^0(\mathcal{B}_M) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_N^0(\mathcal{B}_M)$$

定理 1.3′　もし $\lambda_j(x') \notin \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ ならば

$$P : \mathcal{O}_X|_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X|_Y$$

証明は形式解が一意的に決まっていくから容易である。たとえば [B-G] 参照。

$P$ が $N$ で退化しない時は，$x_1^m P$ を考えて議論することによりこれに帰させることも可能である。さて，定理 1.3 により，$M_+$ での $Pu=0$ の解は一意的に $Z_+ = M_+ \cup N$ に台を持つ解 $\tilde{u}$ に拡張される。所が，$P\tilde{u}=0$ という方程式を $N$ の conormal bundle で考えれば大島の定理により，この方程式は $(x_1 D_1 - \lambda_j(x'))u_j(x) = 0$ $(j=1, \cdots, m)$ という方程式に $\mathcal{P}$-加群として同型であることが知られている。即ち $\tilde{u}$ は $iS_N^*M$ の近傍で

$$\sum_{j=1}^{m} G_j(x, D_{x'})(\varphi_j(x') x_{1+}^{\lambda_j(x')}) \quad (\text{但し } G_j \text{ は}$$

高々 0 階の擬微分作用素でその主要表象は 1 ）と一意に表わせる。

従って，この場合にも，$M_+$ での $Pu=0$ の解から unique に $N$ 上の超函数の $m$ ケの組 $(\varphi_1(x'),\cdots,\varphi_m(x'))$ への対応が作れたことになる。

注意. たとえば 定理 1.3 の仮定の内，$\lambda_j(x')\notin\mathbb{Z}^-$ という部分は $x_1^{\lambda}Px_1^{-\lambda}$ を考えれば容易に落とせる。

さて，ここ迄の部分，即ち，$M_\pm$ での $\mathcal{M}$ の解に対してその境界値を考える，という段階は，$\mathcal{M}$ の楕円性を用いていない，という意味で皮相な物である。以下では $\mathcal{M}$ の楕円性が本質的に関係する議論を行う。又，しばらく $N$ で $\mathcal{M}$ が退化しない場合を論じることにする。(但し $\mathcal{M}$ は 単独と限らぬ 一般の系)

今，まず次の幾何学的事実に注意しよう。

① $S_N^*X$ は $G_+\sqcup G_-\sqcup iS^*M\underset{M}{\times}N$ と直和に分解される。ただし，ここで

$$G_\pm=\{(x,\xi\infty)\in S_N^*X;\ x_1=0,\ \mathrm{Re}\,\xi=\pm(1,0,\cdots,0)\}$$

他方，$\mathcal{M}$ の楕円性の仮定により，特に，

$$\mathrm{Supp}\,(\mathcal{P}\underset{\pi^{-1}\mathcal{D}}{\otimes}\mathcal{M})\cap iS^*M\underset{M}{\times}N=\phi$$

故，$\rho: S_N^*X-S_Y^*X\longrightarrow S_N^*Y$ なる自然な射影を用いて

$$\mathcal{N}_\pm=\rho_*(\mathcal{P}_{Y\to X}\underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes}\mathcal{M}|_{G_\pm})$$

なる $\mathcal{D}_Y$-加群を定めれば，$\mathcal{M}_Y=\mathcal{N}_+\oplus\mathcal{N}_-$ となる。

即ち, $M$の分解 $M_+ \sqcup N \sqcup M_-$ に応じて, 接方程式系 $\mathcal{M}_Y$ の分解 $\mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{M}_-$ を（$\mathcal{M}$が楕円型という仮定の下に）得ることが出来る。我々の目標は, $M_\pm$ での $\mathcal{M}$ の解と方程式系 $\mathcal{M}_\mp$ とを関係付けることである。以下では, $M_\pm$ での $\mathcal{M}$ の解を考える代わりに, $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M};\mathcal{B})=0$ $(j\neq 0)$ という局所可解性が成立つ限り, それと同値な, $Z_\mp = M_\mp \sqcup N$ に台を持つ相対コホモロジー群 $\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M};\mathcal{B}_M)$ を考察の対象とする。

尚, $\mathcal{M}$が楕円型なら $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M};\mathcal{B})=0$ $(j\neq 0)$ は $\mathcal{E}xt^j(\mathcal{M};\mathcal{A})=0$ $(j\neq 0)$ に同値故, これはそれ程 serious なことではない。我々は, $\mathcal{M}$の然るべき条件を満たす"解"と $\mathcal{M}_\pm$ の (microfunction) 解との対応を見出だす為に, $S^*_N X$ 上に層 $\mathcal{C}_{N/X}$ を次のように定義することにする。

**定義 1.4.** $\mathcal{C}_{N/X} = \mathcal{H}^n_{S^*_N X}(\pi_{N/X}^{-1}\mathcal{O}_X)^a \otimes \omega_N$

ここで $\mathcal{C}_{N/X}$ を導入した一つの理由は, この層を $G_\pm$ 上で考えた物と $N$ あるいは $Z_\pm$ に台を持つ超函数との間に関係があるからである。それ等は次の2つの命題により明らかにされる。

**補題 1.5.**

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_X|_N \arrow[dl] & \\ \mathcal{H}^n_N(\mathcal{O}_X)[1] \arrow[rr] & & \mathbb{R}\pi_{N/X*}\mathcal{C}_{N/X}[1] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

なる完全列が存在する。

証明は [S-K-K] Ch. I. Prop. 1.2.5 参照。その特別な場合である。

補題1.6. $\mathcal{H}^0_{Z_\pm}(\mathcal{B}_M) \to \pi_{N/X*}(\mathcal{C}_{N/X}|G_\pm)$ なる自然な写像が存在する。

証明は [S-K-K] Ch. I. Prop. 1.2.4. を適用すればよい。

さて，この層 $\mathcal{C}_{N/X}$ は $\mathcal{C}_M$ 等と種々の関係を持つが，その中でとりわけ有用なのは次の事実である：

@ $\mathcal{C}_{N/X}$ は $S^*_NX$ 上の層である，又，$S^*_NX$ は自然な部分複素構造を持つが，その複素構造に関して正則なパラメーターを持つ microfunction の層と $\mathcal{C}_{N/X}$ とは同型である。

正確な定式化は次のように与えられる。

今 $L$ を $n$ 次元実解析的多様体，$Z$ をその複素化とし，$X$ を $Z$ の余次元 $d$ の複素部分多様体としよう。更に $X$ と $L$ が（実解析的多様体として）transversal に交わるとして，その交わりを $N$ とする。明らかに $N$ は $L$ 内で実余次元 $2d$ である。

以下 $S^*_NX = S^*_LZ \underset{L}{\times} N$，$\widetilde{{}^N X^*} = \widetilde{{}^L Z^*} \underset{Z}{\times} X$

という同一視を行う。

[S-K-K] Chap. I Prop. 1.2.5.

$\mathcal{F}$ を $M$ 上の層として

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}|_N \arrow[dl] & \\
\mathbb{R}\Gamma_N(\mathcal{F})[d]\otimes\omega_{M/N} \arrow[rr] & & \mathbb{R}\pi_*\mathbb{R}\Gamma_{S^*_N M}(\pi^{-1}\mathcal{F})[d]\otimes\omega_{N/M} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

$$\pi:\ \widetilde{{}^N M^*} \longrightarrow M$$

$$S^*_N M \longrightarrow N$$

同じく Prop. 1.2.4

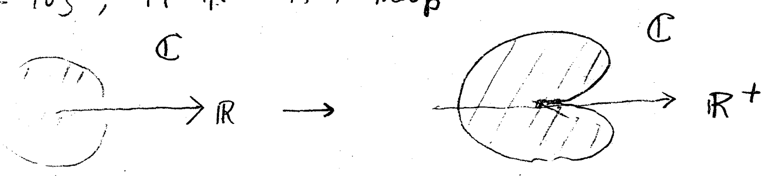
$U$ : $S^*_N M$ で proper convex

$$\Rightarrow H^k(U, \mathbb{R}\Gamma_{S^*_N M}(\pi^{-1}\mathcal{F})) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{Z} H^k_Z(M,\mathcal{F})$$

但し (i) $Z \supset \pi(U)$

(ii) $[Z-N]_{\widetilde{{}^N M^*}} \cap U = \phi$

[蛇足] $N=\{0\}$, $M=\mathbb{R}$ の時の map




$\mathcal{B}_{Z+}$

この時 $C_{N/X} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Z}(\mathcal{P}_{Z \rightleftarrows X} ; C_L)$ (1.3)

なる同型が成立する。

実際, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Z}(\mathcal{P}_{Z \rightleftarrows X} ; C_L)$

$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{D}_{Z \hookleftarrow X} ; C_L)$$

$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{D}_{Z \hookleftarrow X} ; \mathbb{R}\Gamma_{S_L^* Z}(\pi_{L/Z}^{-1}\mathcal{O}_Z))^a[n]$$

$$= \mathbb{R}\Gamma_{S_L^* Z}(\pi_{L/Z}^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{D}_{Z \hookleftarrow X} ; \mathcal{O}_Z))^a[n]$$

$$= \mathbb{R}\Gamma_{S_L^* Z}(\pi_{L/Z}^{-1}\mathcal{O}_X)^a[n-d]$$

$$= \mathbb{R}\Gamma_{S_N^* X}(\pi_{N/X}^{-1}\mathcal{O}_X)^a[n-d] = C_{N/X}$$

だからである。

今 (1.3) の右辺を座標系を使って具体的に書き下してみると次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} N = \{0\}^d \times \{0\}^d \times \mathbb{R}^{n-d} & \hookrightarrow & X = \mathbb{C}^d \times \{0\} \times \mathbb{C}^{n-d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L = \mathbb{C}^d \underset{\mathbb{C}^d}{\times} \overline{\mathbb{C}}^d \times \mathbb{R}^{n-d} & \hookrightarrow & Z = \mathbb{C}^d \times \overline{\mathbb{C}}^d \times \mathbb{C}^{n-d} \end{array}$$

としよう。即ち, $L$ の座標を $(z, t) \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ で, $Z$ の座標を $(z, \bar{z}, t) \in \mathbb{C}^d \times \overline{\mathbb{C}}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$ ととろう。

この時 $\mathcal{P}_{Z \hookleftarrow X}$ は $\bar{z}_j u = 0 \quad (j = 1, \cdots, d)$

なる方程式系と同一視できるが、これは（$Y$を$N$の複素化として）$S^*_NX-S^*_YX$で Cauchy-Riemann 型である。よって$\mathcal{C}_{N/X}$は$S^*_NX-S^*_YX$においては正則なパラメーターを持つmicrofunctionの層に同型である。特に、（$\mathcal{C}_{N/X}$の元は）$S^*_YX$から$S^*_NY=\sqrt{-1}S^*N$への射影$\rho$のfiberに沿って一意接続性をもつ。

$\mathcal{C}_{N/X}$が正則なパラメーターを持つmicrofunctionの層に同型である，という上の事実は，一意接続性等のみならず，$\mathcal{C}_{N/X}$-solutionの性質を調べる際，極めて重要である。（§3参照。）[記] pp. 1-96:s1 ~1.96:s2

さて，補題1.5，1.6.の関係を用いると，$Z_\pm$に台を持つコホモロジー群$\mathcal{E}xt^j_{Z_\pm}(\mathcal{M},\mathcal{B}_M)$と$\mathcal{M}$の$\mathcal{C}_{N/X}|G_\pm$での解とを次のように関係付けることが出来る。

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathcal{B}_M)\simeq\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M};\mathbb{R}\pi_{N/X*}(\mathcal{C}_{N/X}|G_\pm)) \quad \cdots\cdots (1.4)$$

以下に見るように，この証明には$\mathcal{M}$の楕円性が本質的である。

(1.4)を確立した後，定理1.1.を用いて，(1.4)の右辺を$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{C}_N)$と対応付ける。

では，まず(1.4)の証明を与えよう。

最初に補題1.6により

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{B}_M)=\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}(\mathcal{B}_M))$$

から

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathbb{R}\pi_{N/X*}(\mathcal{C}_{N/X}|G_\pm))=$$

注意. $\mathcal{P}_X = \mathcal{E}nd_{\mathcal{P}_Z}(\mathcal{P}_{Z\hookrightarrow X})$ 故

$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Z}(\mathcal{P}_{Z\hookrightarrow X}, C_L)$ には $\mathcal{P}_X$ が自然に作用することに注意。

あるいは この $\mathcal{P}_X$ の作用は，（同じことではあるが）具体的には次のように見てもよい。

今 $Z' = L'^{c}$, $Z = L^{-}$, $(Z', L', X, N)$ 及び $(Z, L, X, N)$ はすべて p. 1-7 の条件を満たし，$L' \supset L$ であるとしよう。この時

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_{Z'}}(\mathcal{P}_{Z'\leftarrow X}, C_{L'}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Z}(\mathcal{P}_{Z\leftarrow X}, C_L)$$

なる自然な写像があることをいおう。もし，これが言えれば，それは同型故，$Z$ のとり方によらずに $\mathcal{P}_X$ が $\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Z}(\mathcal{P}_{Z\leftarrow X}, C_L)$ に作用することが判る。（$L$ と $L'$ に包含関係がない時は $L$ と $L'$ を含む $L''$ をとって考えればよい。）

さて 上の写像の存在を言うには，まず，

$$\mathcal{P}_{Z'\leftarrow Z} \underset{\mathcal{P}_Z}{\otimes} \mathcal{P}_{Z\leftarrow X} \longrightarrow \mathcal{P}_{Z'\leftarrow X}$$

なる自然な写像があることに注意しよう。

従って

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_{Z'}}(\mathcal{P}_{Z'\leftarrow X}, C_{L'}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{P}_{Z'}}(\mathcal{P}_{Z'\leftarrow Z} \underset{\mathcal{P}_Z}{\otimes} \mathcal{P}_{Z\leftarrow X}, C_{L'})$$

なる $\mathcal{P}_X$-linear な写像が自然に定義されるが、この右辺は

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Z}(\mathcal{P}_{Z\leftarrow X}, \mathcal{H}om_{\mathcal{P}_{Z'}}(\mathcal{P}_{Z'\leftarrow Z}, C_{L'}))$$

$$= \mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Z}(\mathcal{P}_{Z\leftarrow X}, C_L)$$

故 求める写像が得られたことになる。

$$= \mathbb{R}\pi_{N/X*}(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{P}_X\otimes\mathcal{M},\ C_{N/X})|_{G_\pm})$$

への写像が導かれることに注意しよう。

所で、$\mathcal{B}_M$ は flabby 故

$$0\to \mathcal{H}^0_N(\mathcal{B}_M)\to \mathcal{H}^0_{Z_+}(\mathcal{B}_M)\oplus\mathcal{H}^0_{Z_-}(\mathcal{B}_M)\to\mathcal{B}_M\to 0$$

が成立するから、

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}\Gamma_N\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{B}_M) \arrow[dl] & \\
\begin{array}{l}\mathbb{R}\Gamma_{Z_+}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{B}_M)\\ \quad\oplus\ \mathbb{R}\Gamma_{Z_-}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{B}_M)\end{array} \arrow[rr] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{B}_M) \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd} \qquad (1.5)$$

なる完全列が存在する。

他方補題 1.5 を用いれば、

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{H}^n_N(\mathcal{O}_X)) \arrow[dl] & \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathbb{R}\pi_{N/X*}C_{N/X}) \arrow[rr] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X|_N) \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd} \qquad (1.6)$$

なる完全列が得られる。

しかるに、定義により $\mathbb{R}\Gamma_N\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{B}_M)$ $\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{H}^n_N(\mathcal{O}_X))$ であり、又、$\mathcal{M}$ の楕円性により $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{B}_M)\xleftarrow{\sim}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X|_N)$ (∵ 解の正則性定理) が成立する。又、$\mathcal{M}$ の楕円性により

$\mathrm{Supp}\,\mathcal{M} \cap \sqrt{-1}S^*M \underset{M}{\times} N = \phi$ 故

$\mathbb{R}\pi_{N/X*}(\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, C_{N/X})|_{G+}) \oplus \mathbb{R}\pi_{N/X*}(\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, C_{N/X})|_{G-})$

$= \mathbb{R}\pi_{N/X*}\,\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, C_{N/X})$ が成立するから，

結局，

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\pi_{N/X*}(\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, C_{N/X})|_{G\pm})$$

が証明された。

次に，$S_N^*X - S_Y^*X \longrightarrow S_N^*Y$ なる射影 $\rho$ を用いて，$\mathcal{M}$ の $C_{N/X}$-解と $\mathcal{M}_\pm$ の $C_N$-解を関係付ける。

実際，$\varpi$ を $P^*X \underset{X}{\times} Y - P_Y^*X$ から $P^*X$ への自然な射影として（$Y \hookrightarrow X$ としておく）

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{P}_Y) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\varpi^{-1}\mathcal{P}_X}(\varpi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{P}_{X\leftarrow Y})[\mathrm{codim}\,Y]$$

が（$Y$ が $\mathcal{M}$ について非特性的である限り）成立するから（[S-K-K] p.415 の証明（i.e. 定理 1-2 の証明）参照），

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y, C_N)$$
$$\to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{P}_Y) \underset{\mathcal{P}_Y}{\otimes} C_N$$
$$\to \rho_*\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{X\leftarrow Y}) \overset{L}{\underset{\mathcal{P}_Y}{\otimes}} C_N\,[1]$$
$$\to \rho_*\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{\mathcal{P}_Y}{\otimes}} C_N)\,[1]$$
$$\to \rho_*\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, C_{N/X})\,[1] \qquad (1.7)$$

なる写像が存在する。

他方 $\mathcal{M}_Y = \mathcal{N}_+ \oplus \mathcal{N}_-$ であったから

$\mathbb{R}\pi_{N/X*}(\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, C_{N/X})|G_\pm)$

$= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\pi_{N/X*}(C_{N/X}|G_\pm))$

が $\mathbb{R}\pi_{N*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{N}_\pm; C_N)$ に同型であること

を言うには，(1.7) を更に $N$ に近（？）着して同型を示せば

十分。即ち，$\mathbb{R}\pi_{N*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y, C_N)$ が，

$\mathbb{R}\pi_{N/X*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, C_{N/X})[1]$ と同型を言えばよい。

換言すれば

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_N}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{B}_N/\mathcal{a}_N) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\pi_{N/X*}C_{N/X})[1] \quad \cdots\cdots (1.9)$$

を言えば十分。

ここで再び補題 1.5 を用いれば

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\pi_{N/X*}C_{N/X})[1] \arrow[dl, "+1"'] & \\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X|_N) \arrow[rr] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{H}^n_N(\mathcal{O}_X))[1] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

なる完全列が得られるが，ここで，

定理 1.1 により $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{H}^n_N(\mathcal{O}_X))[1]$

$\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_N}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{B}_N)$

が成立し，又，Cauchy-Kowalevsky の定理により

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_N}(\mathcal{M}_Y ; \mathcal{A}_N) \xleftarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X|_N)$$

が成立する。

他方．自明な完全列

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_N}(\mathcal{M}_Y ; \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N) \arrow[dl, "+1"'] & \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_N}(\mathcal{M}_Y ; \mathcal{A}_N) \arrow[rr] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_N}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{B}_N) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

が存在するから，結局，

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_N}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N) \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\tau_{N/X*}\mathcal{C}_{N/X})[1]$$

なる同型が得られる。

以上をまとめれば，結局，次の定理が得られる。

定理 1.7

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_M)$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\tau_{N*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_\pm ; \mathcal{C}_N)[-1] \quad \text{----} (1.8)$$

次に，この同型の具体的な意味を，簡単な場合に考えてみよう。

今 $\mathcal{M} = \mathcal{D}_M/\mathcal{D}_M P$ ，$N = \{x \in M ; \varphi(x) = 0\}$，$\mathrm{grad}_x \varphi|_N \neq 0$

($\varphi(x)$ は $N$ の近傍で実解析的) という場合を考えよう。

この時 $P$が楕円型なら 方程式 $Pu = f$ は常に可解故，

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M) \ (= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_M))$$

として，$\mathbb{R}\Gamma_{Z_\pm}(\mathcal{S}) = (j_{\pm *}(\mathcal{S})/\mathcal{S})|_N [-1]$ ．ただし

$j_\pm : M_\pm \hookrightarrow M$。

次に右辺，$R\pi_{N*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_\pm ; C_N)$ の構造がどうなっているかを考えよう。

今 $n = \dim M > 2$ とすれば，(Pの楕円性より) $\#\{\tau ; p_m(x, \tau \operatorname{grad}_x \varphi + \sqrt{-1}\eta) = 0,\ \operatorname{Re}\tau < 0\}$ は，$x \in N$, $\eta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\eta \not\parallel \operatorname{grad}_x \varphi(x)$ として，$(x,\eta)$ によらずに一定 $= r = m/2$ であることはよく知られている。更に，この状態において，擬微分作用素に対する除法の定理を用いると，

$$P(x,D) = Q^+(x,D)\,Q^-(x,D) \qquad (1.9)$$

但し $G_\pm$ 上 $\sigma(Q^\mp) \neq 0$，かつ，$Q^\pm$ の階数は $r$，という分解が出来る。(S-K-K p. 409 参照。この陳述 [註1-14bis] は fiber 方向には大域的な陳述であることに注意されたい。) ここで，たとえば $\varphi(x) = x_1$ として，$Q^-(x,D) = D_1^r - \sum_{j=0}^{r-1} Q_{r-j}(x,D')\,D_1^j$ と正規化されているとしてよい。

従って $R\pi_{N*} R\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_\pm ; C_N)$

$$= R\pi_{N*} C_N^r[-1] = (\mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N)^r[-1]$$

となる。

故に，まとめて $j_{\pm *}(\mathcal{S})/\mathcal{S}|_N \simeq (\mathcal{B}_N/\mathcal{A}_N)^r$

なる関係が得られたことになる。

[註] 従って, たとえば ごく簡単な作用素に対しても, このような分解を具体的に表示することは それ程容易なことではない。実際 たとえば

$$D_1^2 - x_1 D_2^2 - D_2 D_2$$

$$= \left(D_1 + iD_2\sqrt{-\frac{D_3}{D_2} - x_1}\; A\left(iD_2\left(-x_1 - \frac{D_3}{D_2}\right)^{3/2}\right)\right)$$

$$\times \left(D_1 - iD_2\sqrt{-\frac{D_3}{D_2} - x_1}\; A\left(iD_2\left(-x_1 - \frac{D_3}{D_2}\right)^{3/2}\right)\right)$$

(但し $A(t) = \dfrac{{}_2F_0\left(-\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{a}\right)}{{}_2F_0\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{a}\right)}$ )

というように, 上の分解を具体的に与えるには, この場合, 2階の常微分方程式を解かねばならぬ。勿論 このような分解を与えることは, 実際には 境界値問題の基本解を与えていることと大差ないから面倒でも当然ではあるけれど。

即ち，$N$の近傍と$M_+$の交わりで定義された$\mathcal{M}$の解の内，$N$を越えて伸びる物を法として考えれば，それ等は，$r=m/2$ケの（$N$上の）マイクロファンクションと1対1に対応することがわかる。他方，定理1-1より判るように，$\mathcal{M}$の解の境界値としては$m$ケ独立な物が（$\mathcal{B}$の範囲で）存在するから，$\mathcal{M}$の$N$の近傍での解（必然的に実解析的）を法にして考えれば，$\mathcal{M}$の$M_+$での解の境界値の間にはmicro-localな関係が$m/2$ケ存在することになる。それは結局，(1.9)という$P$の分解により得られたものである。

このような事情，即ち，$M_+$からの境界値を考えた為に現われる関係式の存在，は，$P$が$N$で退化する場合にも観察される。実際，$P$が$N$で確定特異点型である場合の議論（pp. 1-4～1-5）をこの場合に精密化するには次のように考えればよい。

今まず $S^*_YX \cap S^*_MX$ の近傍で方程式 $Pu=0$ を考えて見よう。この時，[O]により，$Pu=0$は $(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-\lambda_j(x'))u_j=0$ $(j=1,\dots,m)$ と$\mathcal{P}$-加群として同型である。（但し $N=\{x_1=0\}$ として）従ってその近傍では $u$ は $\sum_{j=1}^{m} G_j(x',D_x)\varphi_j(x')x_{1+}^{\lambda_j}$ という表示を持つ。

即ち $S^*_YX \cap S^*_MX=\sqrt{-1}S^*_NM$ の近傍で $Pu=0$ の $\mathcal{C}_{N/X}$-解を考えれば，それは上の形に（$\sigma(G_j)=1$ とすれば一意に）表わせる。しかるに，もし $(\varphi_1(x'),\dots,\varphi_m(x'))$ を"境界値"

(pp. 1-4〜1-5 の意味で) とする $Pu=0$ の (たとえば) $M_+$ における超函数解があれば、それは pp. 1-4〜1-5 の議論に見られるように、$P\tilde{u}=0$, $\mathrm{Supp}\,\tilde{u}\subset M_+\sqcup N$ となるような拡張を一意に許すから、補題 1-6 により、$\tilde{u}$ は (定義された) $G_+$ 全体で $\mathcal{C}_{N|X}$-解と見なすことが出来る。即ち、$\sqrt{-1}S_N^*M$ の近傍で定義された $Pu=0$ の $\mathcal{C}_{N|X}$-解 $\sum_{j=1}^{m} G_j(x, D_x)\,\varphi_j(x')\,x_{1+}^{\lambda_j}$ は (この場合) $G_+$ 全体に拡張されねばならない。しかるに $p_m\neq 0$ なる所では、$Pu=0$ は $x_1^m u=0$ に同型故 $S_Y^*X$ 以外ではそのような拡張は局所的には一意に可能である。従って、$G_+\cap\{p_m=0\}$ なる点 (それは $m\geqq 3$ ならば $p_m$ を楕円型と仮定して、$m/2$ ケ存在する) の所で問題が起きる。そのような点を $x_1^*, \cdots, x_r^*$ $(r=m/2)$ とすると、$x_j^*$ の回りで解を"解析接続"した時それは一価であることより、$(\varphi_1(x'), \cdots, \varphi_m(x'))$ の間には $(m/2)$ ケの関係式が無ければならぬことが必要である。結局、それは、一種のモノドロミーの問題であり、$m>2$ の時、具体的な扱いを一般の場合に ($N$ で退化しない場合と同じ程度に迄) 遂行することは困難であろうと思われている。(勿論表現論に現われる具体的な作用素については話は別である。)

§2. 応用

この節では，§1で展開した（$N$で退化しない）楕円型方程式系$\mathcal{M}$に対する境界値問題の応用を2,3簡単な場合に述べよう。

現在の所，"境界値問題"の応用としては次の3つの物が大雑把に言って，考えられよう。

一つは（これが最初のmotivationであったが）"接-Cauchy-Riemann系"を満たす函数はどこ迄伸ばせるか？という問題である。これは本質的に，余次元$d$が1より大の時に面白い。（例えば 成木氏，R. Nirenbergの仕事と関係して）これは，しかし，[S-K-K]の議論（特にChap. IIIの最後）と余次元$d>1$の時の定式化（§3に与えられる）を組み合わせて得られる物故，他の機会に詳述は譲ることとして，ここでは省略させて頂く。

又，この問題とは，逆に，$\mathcal{M}$の解の構造が簡単であるとして，その接-Cauchy-Riemann系$\mathcal{M}_Y$の解の構造を調べることも可能である。このようなapproachの2,3の例について§2.1で詳述しよう。

更に，"境界値問題"により（micro）-localな結果から（semi-）globalな結果を得られる場合も多い。その一例として，楕円型方程式系のコホモロジー群の有限性について，その最も簡単な場合に

ついての議論を §2-2 で与える。余次元 $d>1$ の場合には、定数係数の方程式系に対する興味ある事実をいくつか境界値問題を利用して導くことが出来るが ここではそれは省略したい。

§2-1　局所的な問題への応用。

複素領域では、線型微分方程式の可解性は、本質的には代数的な問題であり、適当な正則性の仮定の下では、常に保証されると思っても解析的にはさほど問題は起きない。(Cauchy-Kowalevskaja の定理) (勿論、実際には $\mathcal{O}$ での可解性を見ることはそれ程易しいことではなく、必要十分条件は勿論のことよい十分条件も余り知られてはいないようである。[Q], [P], [K] 等参照。[K] の用語で言えば、"$\mathcal{M}$ が good regular filtration を持つ" というのはかなりよい十分条件である。)

しかしながら、実領域では Lewy の例に見られるように事態は全く異なる。一般には高次のコホモロジー群が残るからである。他方 [S-K-K] の Chap. II で示してあるように、Supp $\mathcal{M}$ [注] の正則性と $\mathcal{M}$ 自身の代数的な正則性の条件の下に、$\mathcal{M}$ の複素領域での $\mathcal{D}$-加群としての構造は著しく簡単である。即ち、それは micro-local には de Rham 系だと思ってよい。従って $\mathcal{M}$ の "複素領域での解" は $\mathcal{M}$ の陪特性帯に沿って

[注] 本節での $\mathcal{M}$ は §1 の記号では $\mathcal{M}_\pm$ に当たることが多い。誤解のおそれは無いであろう。

一定である，と考え得る。従って実領域での様相の複雑さは，実多様体という薄っぺらい部分とこの陪特性帯がどう交叉するか，という幾何学により規定されているのだろう，と考えることは自然であろう。実際，超函数論での多くの結果はこのような考えを指導原理として得られている。

ここでは，そのような考えを押し進めて"すべて"を境界値問題により導出することを試みる。

そのようなapproachの一つの見本は[S-K-K(日)]に与えられているが，そこでは $\mathrm{Supp}\,\mathfrak{M}$ の実領域での標準型を用いているからやや中途半端である。そこでは，$\sqrt{-1}S^*M$ は"まっすぐ"にしておいて $\mathfrak{M}$ の陪特性帯を"曲げ"ていると言ってよい。以下では逆に $\sqrt{-1}S^*M$ を"動かして" $\mathfrak{M}$ の陪特性帯は"まっすぐ"なままで議論を行なう。

議論の出発点は次の事実にある。

今，$M$ を $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ $N = \{x = (z, \bar{z}) \in \mathbb{R}^{2n}; \varphi(x) = \varphi(z, \bar{z}) = 0\}$ (但し $\varphi$ は $\mathrm{grad}\,\varphi|_N \neq 0$ なる実数値実解析函数)，$M_\pm = \{z \in M; \pm\varphi(z, \bar{z}) > 0\}$ としよう。今定理1-7の $\mathfrak{M}$ として $M$ 上のCauchy-Riemann系を取ろう。今 $\mathrm{Supp}(\mathcal{P}_{Y \hookrightarrow X} \otimes \mathfrak{M}|_{S_N^*X}) = Z$ とする時 $S_N^*M \simeq N_+ \sqcup N_-$ と $p(Z)$ とを同一視出来る。($X$, $Y$ はそれぞれ $M$, $N$ の複素化，$N_\pm = \{(x, \pm\mathrm{grad}_x \varphi(x)); x \in N\}$ とする。) 従って定理1-7により，

具体的計算例について簡単な場合について復習しておこう。

$M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\ell$ , その点の座標を $(t, x, y)$

$\cup$

$N = \{(t, x, y) \in M \,;\; x = 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\ell$

$X, Y$ を各々 $M, N$ の複素化として $X$ の点を $(\tau, z, w)$ にて表わすこととする。

今 $\mathcal{M}$ : $\left\{ \left(1 + i \dfrac{\partial f}{\partial t}\right) \dfrac{\partial}{\partial x_j} - i \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \dfrac{\partial}{\partial t} \right\} u = 0$

$j = 1, \cdots, n$

$\left( \begin{array}{l} \text{但し} \quad f(t, 0, y) = 0 \\ \qquad\quad \operatorname{grad}_x f(t, x, y) = 0 \iff x = 0 \end{array} \right)$

という形の方程式についてその解の様子を調べてみよう。

$B = \{(t, x, y) \in M \,;\; f(t, x, y) \geq 0\}$ と定めておく。

この時

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M) = \pi_N^{-1} \mathbb{R}\Gamma_B(\mathbb{C}_M) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{C}_N$$

この証明のキーポイントは

$$\begin{array}{l} X \ni (\tau, z, w) \\ \big\downarrow \Phi \\ Y \ni (\tau + i f(\tau, z, w), w) \end{array}$$

なる写像 $\Phi$ を考えて $\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = \Phi^{-1}\mathcal{O}_Y$ から

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M)$$

$$= \mathbb{R}\Gamma_{S_M^*X}\, \pi_{M/X}^{-1}\, \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)^a\, [n+l+1]$$

$$= \mathbb{R}\Gamma_{S_M^*X}\, \pi_{M/X}^{-1}\, \Phi^{-1} \mathcal{O}_Y^{a}\, [n+l+1]$$

として，これを具体的に計算するのであった。

$$\mathcal{E}xt^{k-1}_{\mathcal{P}_N}(\mathcal{M}_N, C_N)_{N_\pm} \simeq \mathcal{H}^{k}_{M_\pm}(\mathcal{O}_M) \qquad (2.1)$$

が成立する。他方 [S-K-K] によれば，左辺は $\mathcal{M}_N$ の generalized Levi form $L$（それは今の場合，$N_+$ では $N$ の Levi form と一致する。$N_-$ では符号が逆になる）により その構造が規定される。たとえば $L$ が $(p, n-1-p)$ なる signature を持てば，そこでは $\mathcal{E}xt^{p}_{\mathcal{P}_N}(\mathcal{M}_N, C_N)$ が残って，それは $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}_N \cap \sqrt{-1}S^*N$ $(= N_+ \sqcup N_-)$ に $S^*M$ の接触構造 $\omega$ により接触構造を定義して考えた microfunction の層に同型である。そこで今 $\mathcal{M}$ を，$M$ を $\mathbb{C}^n$ と見て $M$ 上の線型微分方程式系（即ち $\bar{z}$，$\partial/\partial\bar{z}$ を含まない）とすれば，$\mathcal{M}$ の $N_+$ での micro-function 解の構造は $\mathcal{M}$ の $\mathcal{O}_M$-解の構造により知られることになる。ところが今 $\mathcal{M}$ を単一特性的とすれば，$\mathcal{M}$ は $P^*\mathbb{C}^n$ 上 micro-local に $\mathcal{P}_{\mathbb{C}^n} \big/ \left(\mathcal{P}_{\mathbb{C}^n}\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \mathcal{P}_{\mathbb{C}^n}\frac{\partial}{\partial z_d}\right)$ と見なすことが出来る。（[S-K-K] Chapter II）勿論ここでは $P^*\mathbb{C}^n$ での接触変換を行っているから，$N_+$ の実接触多様体としての構造は変化し得る。従って $N_+$ 上の任意の（擬）微分方程式に対してこのような $\mathcal{M}$ の標準型を用いて都合良く計算を遂行出来るわけではない。しかし "generic" にはそのような扱いが可能である。そのような場合を 2.3 以下に論じてみよう。

典型的な場合としてたとえば次のような場合（non-Cauchy-Riemann 型）を考えてみよう。

まず我々の考える状況を明らかにしよう。

今純虚 skew manifold $X$ とその複素化 $X^{\mathbb{C}}$ が与えられているとしよう。$\mathcal{M}$ を $X^{\mathbb{C}}$ 上の擬微分方程式系とする時 $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ に関する情報によって $\mathcal{E}xt^{j}_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}, C_X)$ の構造を知りたい，というのが目標である。

今 $X^{\mathbb{C}}$ 内の正則包合的多様体 $V$ が以下の状況にあるとしよう。

(i) $\mathrm{codim}_{\mathbb{C}} V = d$。

(ii) $V$ は bicharacteristic flow $p$ により $p^{-1}(Y^{\mathbb{C}})$ と表現される。ここで $Y^{\mathbb{C}}$ は $X$ 内で実余次元 $(l+r)$ の純虚接触多様体 $Y$ の複素化。

(iii) $V\cap X$ は正則。

(iv) $V\cap X$ から $Y$ への，$p$ と両立する，射影 $p'$ があって $\dim_{\mathbb{R}} p'^{-1}(y)=r$ $(y\in Y)$。この $r$ により，$l=d-r$ と定める。

以下問題は micro-local に考える。まず $X^{\mathbb{C}}$ の量子化座標 $(z,\zeta)$ を $V=\{(z,\zeta)\,;\,\zeta_1=\cdots=\zeta_{l+r}=0\}$ となるように取っておく。次に $V$ を保つ接触変換を用いて，$X^{\mathbb{C}} = P^*\mathbb{C}^n$ とした時，$X$ が $\mathbb{C}^n$ 内の開集合と同一視できるように座標系を取り直す。それは infinitesimal なこと故，$T_0X \hookrightarrow T_0\mathbb{C}^n$ となるように $X^{\mathbb{C}}$ の fibration の方向を取り

直せればよい。それは今の場合さしたる困難なく可能である。[註 pp. 2-6 bis 1 ~ 2-6 bis 2]

このような幾何学的背景の下に、$\mathcal{M}$ の $C_X$-解の様子を調べよう。最初に注意したように、$X$ を $S_N^*\mathbb{C}^n$ の開集合と考える点が重要な点である。

以下 $X \in M_+$ としよう。すると

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, C_X) \\
&= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{C}^n}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})) \quad (\because \S 1.\ \text{定理 } 1\text{-}7) \\
&= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X^{\mathbb{C}} \to Y^{\mathbb{C}}} \underset{\mathcal{P}_{Y^{\mathbb{C}}}}{\otimes} \mathcal{M}_{Y^{\mathbb{C}}}, \mathbb{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{C}^n}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})) \\
&\qquad (\because [\text{S-K-K}]\ \text{Chap. II. 構造定理}) \\
&= \mathbb{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{C}^n} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \to Y} \underset{\mathcal{P}_Y}{\otimes} \mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \\
&= \mathbb{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{C}^n}\, p'^{-1} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{D}_{X \to Y}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})) \\
&= \mathbb{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{C}^n}\, p'^{-1} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y, p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-d}}) \\
&= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{p^{-1}\mathcal{P}_Y}(p^{-1}\mathcal{M}_Y, \mathbb{R}\Gamma_{S_N^*\mathbb{C}^n}(p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-d}}))
\end{aligned}
$$

ここで $V$ は $p^{-1}(y)$ $(y \in Y^{\mathbb{C}})$ の conormal の全体

実際そのような canonical coordinate system がとれることは，次のようにすれば明らかである。

問題は infinitesimal 故 $x^* \in X^{\mathbb{C}}$ での接空間で考えよう。$E^{\mathbb{C}} = T_{x^*}(X^{\mathbb{C}}) \cap \{\omega = 0\}$ を考えれば，これは自然に $2(n-1)$ 次元の symplectic ベクトル空間と見なせる。$E = T_{x^*}(X) \cap \{\omega = 0\}$ として（これは実 $2(n-1)$ 次元 symplectic ベクトル空間）

$$\begin{cases} V \cap \Lambda_1^{\perp} = 0 \\ \Lambda_1 \cap E = 0 \end{cases}$$

となる Lagrangian subspace $\Lambda_1$ を一つ固定しよう。

次に $\begin{cases} \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \{0\} \\ V^{\perp} \subset \Lambda_2 \end{cases}$

となる Lagrangian subspace $\Lambda_2$ を作ろう。それには

実際 $V = \{\eta_1 = \cdots = \eta_d = 0\}$ とすれば，

$$V^{\perp} = \{x_{d+1} = \cdots = x_n = 0,\ \eta = 0\} \text{ 故}$$

$\Lambda_1 = \{x = 0\}$，$\Lambda_2 = \{\eta = 0\}$ となるように座標系をとっておけばよい。（この段階では実構造 $E$ は忘れていても構わないことに注意！）

こうすれば $\omega = \varphi\, dt$ $(\varphi \neq 0)$ となる $t$ を用いて

$$\begin{array}{ccc} X^{\mathbb{C}} & \simeq & P^*\mathbb{C}^n \\ \downarrow{\scriptstyle (t,x)} & \swarrow & \\ \mathbb{C}^n & & \end{array}$$

とできる。

ここで $V$ は $x^*$ で infinitesimal には $\{\eta_1 = \cdots = \eta_d = 0\}$ で与えられていると思ってよい。即ち,

$V = \{\eta_j - f_j(x, \eta') = 0\ ,\ j = 1, \cdots, d\}.\quad f_j(x^*) = 0.$

となっている。

ここで $\tilde{\eta}_j = \eta_j - f_j(x, \eta')\quad (j = 1, \cdots, d)$ と正準座標系 $(\tilde{x}, \tilde{\eta})$ をとり直しても infinitesimal な状況に変りはないから, 最初から $V$ は $\{\eta_1 = \cdots = \eta_d = 0\}$ と与えられているとしてよい。

しかも, この時

$$T_{x^*}(X) \cap \{\omega = 0\} \cong T_{x^*}(\mathbb{C}^n) \cap \{t = 0\}$$

であり,

$$T_{x^*}(X) \subset T_{x^*}(\mathbb{C}^n) \cap \{t = 0\}$$

となることはないから

$$T_{x^*}(X) \cong T_{x^*}(\mathbb{C}^n) \cap \{\mathrm{Re}\, t = 0\}$$

( $T_{x^*}(X) \cap \{\omega = 0\} = T_{x^*}(X) \cap \{\mathrm{Re}\, \omega = 0\}$ 故

$T_{x^*}(X) \cap \{\omega = 0\}$ 及び $T_{x^*}(\mathbb{C}^n) \cap \{\mathrm{Re}\, t = 0\}$ は各々 $T_{x^*}(X)$, $T_{x^*}(\mathbb{C}^n)$ 内で余次元 1 であることに注意.)

従って, 以上より $T_{x^*}X \hookrightarrow T_{x^*}(\mathbb{C}^n)$ となるように $X^{\mathbb{C}}$ の fibration をとれたことになる。又, そのとり方より $V = \{\eta_1 = \cdots = \eta_d = 0\}$ となっている。

になっているから　$V$ についての仮定 (iv) により、$p'(V\cap X)$ $=T$ は $\mathbb{C}^{n-d}$ 内の実超曲面と考えることが出来、$V\cap X$ は $T$ と同一視できる。従って問題は、$\mathbb{R}\Gamma_{S^*_N\mathbb{C}^n}(p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-d}})$ をこの状況の下でどのように計算するか、ということに帰着される。従って　$N\cup M_\pm = Z_\pm$ として

$\varinjlim_U \mathbb{R}p_*\mathbb{R}\Gamma_{Z_+}(U;\, p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-d}})$ （$U$ はたとえば $V\cap X$ の点 $x_0$、即ち $N$ から $\mathbb{C}^{n-d}$ への射影の critical point $x_0$ の近傍）を計算できればよい。しかるに [V] によれば、

$$\varinjlim_U \mathbb{R}p_*\mathbb{R}\Gamma_{Z_+}(U;\, p^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-d}})$$

$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathbb{R}p_!\,\underline{\mathbb{C}}_{Z_+},\, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-d}})[2d]$$

$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om(\underline{\mathbb{C}}_{p(Z_+)},\, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-d}})$$

しかるに　$p(Z_+)$ の境界は $T$ であるから、これは、

$= E^\cdot_{x_0}\otimes C_Y$　と表現できる。　（$E^\cdot_{x_0}$ は $\mathbb{C}$ 上の有限次元線型空間の集り）

従って以上をまとめれば、

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, C_X) = E^\cdot \underset{\mathbb{C}}{\otimes} p'^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathcal{M}_Y, C_Y)$$

なる $E^\cdot$ が存在することになる。更に $\mathcal{M}_Y$ として de Rham 系をとれば明らかに $E^\cdot$ は一意である。これにより $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, C_X)$

の構造は抽象的には分ったと言える。重要な点は、それが$C_Y$と関係させられた所である。

$E^{\cdot}$の具体的構造を求めるのには、$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, C_Y) = \mathbb{C}$となる$\mathcal{M}_Y$から出発してこれに対応する極大過剰決定系$\mathcal{M}$を考えてそれに関するコホモロジー群を計算する、という方法がある。直観的には、$V$に関するphase function $f(z)$であって$V \cap X$上で実（又はpositive type）な物を考え、$\delta(f(z))$が如何に"realify"されるかを見ることになる。

即ち$\{f(x)=0,\ df(x) \propto \omega\} \subset V$となるphase function $f(x)$であって$V \cap X$上でpositive typeとなる物を考える。

そのような$f$は、たとえば$V$が$\{\zeta_j = A_j(z, \zeta'),\ j=1, \cdots \cdots d\}$と与えられていれば、$f$の$z_1 = \cdots = z_d = 0$での初期値を$\langle z', \zeta' \rangle$（$\zeta'$：実）にて与えて

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = A_j\left(z, \frac{\partial f}{\partial z_{d+1}}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \qquad j=1, \cdots, d$$

を解けば作ることができる。

この時$\mathcal{M} = \mathcal{D}\delta(f)$とおいて$\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, C_X)_{0, idf\infty}$をもとめれば$E^{\cdot}$が求まったことになる。実際それは、

$$\mathbb{R}\Gamma_Z(\underline{\mathbb{C}}_X)_0 \qquad (Z = \{\mathrm{Im}\, f \geq 0 \text{ かつ } \mathrm{Re}\, f = 0\})$$

になることを次のようにして示し得る。

まず$H = \{f(x) = 0\}$と定めれば、

$\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, C_X)_{0, idf\infty}$

$= \mathbb{R}\Gamma_{S_L^*\tilde{L}}\, \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\tilde{L}})_{0, idf\infty}$ （$S_L^*\tilde{L} \simeq X$, $\tilde{L}$は$L$の複素化とした）

$= \mathbb{R}\Gamma_{S_L^*\tilde{L}}(\underline{\mathbb{C}}_H)_{0, idf\infty}$

ここで $f = x_1 + i g(x')$ （$x$実で $g$ 実）と$f$を正規化しておけば これが

$\mathbb{R}\Gamma_{\{x'\in\mathbb{R}^{n-1};\ g(x')\geq 0\}}(\underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^{n-1}})$

$= \mathbb{R}\Gamma_{\{x\in\mathbb{R}^{n};\ x_1=0,\ g(x')\geq 0\}}(\underline{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}^{n}})$

に等しいことは直ちに示し得る。

このようにして $E^{\cdot}$ の形をある程度具体的に調べることも可能である。

今迄たとえば、$V$がregularである時に、そこに台を持つ方程式系$\mathcal{M}$について、$\mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{M}, C_X)$の計算を試みて来た。しかし、そこで用いられた方法は、他のいろいろの場合に適用できる。そのようなもう一つの例として次のような場合を考えてみよう。今$V$が最も簡単な特異性を持つ場合、即ち $V = V_1 \cup V_2$, 但し$V_1$及び$V_2$はregular, $V_1$と$V_2$は横断的に交わっている場合を考えてみよう。この場合、$V_1 \cap V_2$の接触幾何学的構造が極めて重要となる。たとえば$V_j$の陪特性帯を$b_j$として、$\operatorname{codim}_{b_j}(b_j \cap V_k)$

$\geq 2$ $(j \neq k)$ が常に成立つ時，$V$ に台を持つ方程式系 $\mathcal{M}$ は $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ （但し $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}_j \subset V_j$）と分解できることが知られている。（[K-K-O] Theorem 1） 従って $\mathrm{codim}\,(V_1 \cap V_2) = 1$ の時を主として考えることとすれば，この時，$\omega|_{V_1 \cap V_2} \neq 0$ （$\omega$ は canonical 1-form）というのが重要な条件となる。今 簡単の為，$\mathrm{codim}(V_j) = 1$ として，$V_j = \{p_j = 0\}$ とし，$\{p_2, p_1\} \neq 0$ としよう。この時，$\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{J}$，$\sigma(\mathcal{J})$ が reduced の仮定の下に，$\mathcal{M}$ の複素領域での標準型は "generic" には，

$$z_1 D_1 - z_2$$

となることが知られている。（[K-K-O] Theorem 3.）

このように複素領域での標準型が分っている場合には実領域での具体的解析も $V$ が regular の場合と同様に行い得る。詳しくは（といっても，そこにも余り詳しくは述べてないが）[K-K-O] を参照。

又，たとえば，幾何学的に興味ある方程式であって その台が regular でない物，具体的には

$$P_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(Z_k \overline{Z}_k + \overline{Z}_k Z_k) - i\alpha T$$

但し $Z_k = \dfrac{\partial}{\partial z_k} + i\bar{z}_k \dfrac{\partial}{\partial t}$，$T = \dfrac{\partial}{\partial t}$

(Cf. Folland-Stein, Parametrices and estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex on strongly pseudo-convex

boundaries; Bull. A.M.S. 80, 253–258, 1974)
はよい適用例となる。しかしながら、このような場合には低階の項の処理が複素領域では困難であって、一般論を本節の方法で展開するのはかなり面倒(〜無理)なように思える。

§2.2.

この節では micro-local な結果から semi-global な結果を境界値問題を用いて導き出す議論の一例として、楕円型方程式系 $\mathcal{M}$ の解層係数のコホモロジー群 $Ext^j(\Omega; \mathcal{M}, \mathcal{B}) = Ext^j(\Omega; \mathcal{M}, \mathcal{A})$ の有限次元性を簡単な場合に議論してみよう。

最も重要な場合として、$\partial\Omega$ が $C^\infty$ で $\mathcal{M}$ の $\partial\Omega$ への tangential 方程式系が楕円型、という場合を考えてみよう。

今 $\bar{\Omega}$ はコンパクトと仮定する。

$\mathcal{M}$ は局所的には長さ有限の free resolution を持つから、$\bar{\Omega}$ の covering $\{\bar{U}_j\}_{j\in I}$ $(\#(I)<\infty)$ をとって各 $\bar{U}_j$ 上 $\mathcal{M}$ は長さ有限の($\mathcal{D}^f$による) free resolution を持つとしてよい。又、更に $\{\bar{U}_j\}$ の細分をとることにより、$J_0 < J_1$ のとき

$$
\begin{tikzcd}
0 & \mathcal{M}|_{\bar{U}_{J_0}} \arrow[l] \arrow[d, "\rho^{J_0}_{J_1}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{D}^{f\, r_0^{J_0}} \arrow[l] \arrow[d, "\rho^{J_0}_{J_1}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{D}^{f\, r_1^{J_0}} \arrow[l, "P_0^{J_0}"'] \arrow[d, "\rho^{J_0}_{J_1}"'] & \cdots \arrow[l] \\
0 & \mathcal{M}|_{\bar{U}_{J_1}} \arrow[l] & \mathcal{D}^{f\, r_0^{J_1}} \arrow[l] & \mathcal{D}^{f\, r_1^{J_1}} \arrow[l, "P_0^{J_1}"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

が可換になるように $\Phi_{\ell}^{J_k}$, $\rho_{J_1}^{J_0}$ を作ることができる。
(但し $\overline{U}_{J_0} = \bigcap_{j \in J_0} U_j$ etc.) 実際, それには, 一般に

$U$ 及び $V$ 上で与えられた free resolution から $U \cap V$ の有限 covering $\{W_i\}$ を, $U, V$ の適当な有限 covering $\{U_\lambda\}$, $\{V_\mu\}$ に対して,

$$\left\{\begin{array}{ll} (i) & U_\lambda \cap V_\mu \subset {}^{\exists}W_{i(\lambda,\mu)} \\ (ii) & \bigcup_i W_i = U \cap V \end{array}\right.$$

となるように作れば, $\mathcal{M}/U$ の free resolution を更に $W_i$ に制限した各項から, $\mathcal{M}/V$ の free resolution を $W_i$ に制限した各項への写像は自由加群の間の話故明らかに可能であることに注意すればよい。

以上の準備の下に, たとえば

$$K^{p,q} = \prod_{|I|=p} \mathcal{A}^{r_q^I}(\overline{U}_I)$$

なる2重複体を作り, そのコホモロジー群として

$$Ext^j(\overline{\Omega}, \mathcal{M}, \mathcal{A})$$

が得られる。($\because$ $\mathcal{A}$ は cohomologically trivial)

$\overline{U}_I$ を $U_I$ に置き換え, $\mathcal{A}$ を $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}$ に置き換えれば同様に

$$Ext^j(\Omega; \mathcal{M}, \mathcal{E}) \;(\; Ext^j(\Omega; \mathcal{M}, \mathcal{B}) \text{ resp.})$$

が得られる。

さて，§1の結果と，$\mathcal{M}_{\partial\Omega}$ が楕円型であることを用いれば，(1.8)の左辺の境界上のコホモロジー群が消滅することから

$$\mathrm{Ext}^j(\bar{\Omega};\mathcal{M},\mathcal{B})=0 \qquad (\forall j)$$

従って（$\mathcal{M}$の楕円性を用いて）

$$\mathrm{Ext}^j(\bar{\Omega};\mathcal{M},\mathcal{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^j(\Omega;\mathcal{M},\mathcal{E})$$

が成立するから [$\check{K}$] の議論を二重複体

$$\Big\{\prod_{|I|=p}\mathcal{Q}^{r_I}(\bar{V}_I)\Big\},\qquad \Big\{\prod_{|I|=p}\mathcal{E}^{r_I}(V_I)\Big\}$$

のコホモロジー群に適用して

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^j(\Omega;\mathcal{M},\mathcal{E})<\infty$$

を得ることが出来る。

これらの議論を種々精密化することも可能であるがここには略する。

§3.

この節では，余次元 $d$ が 1 より大であるような部分多様体 $N$ における"境界値問題"について考える。§1 の議論が本質的には $N$ 上での $\mathcal{B}/\mathcal{a}$ での解析で話が済んだのに比べると，今度は本質的に $\sqrt{-1}S^*N$ 上での $\mathcal{C}$ の解析を行なう必要から，かなり道具立ては大変になる。

まず記号の準備から始める。

$M$ を実解析多様体，$N$ をその余次元 $d$ の部分多様体，$X$，$Y$ を各々 $M, N$ の複素化としよう。この時

$$p : S_N^*X - S_Y^*X \longrightarrow S_N^*Y = \sqrt{-1}S^*N$$

$$q : S_N^*X - S_M^*X \longrightarrow S_N^*M$$

なる２つの自然な射影を定義する。

今 $M$ 上で定義された線型楕円型微分方程式系 $\mathcal{M}$ に対して，次の定理が得られる。

定理 3.1. $N$ が $\mathcal{M}$ に関して非特性的であるとする。この時，

$$\mathbb{R}\Gamma_{S_N^*M}(\pi_{N/M}^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M))^a \otimes \omega_{N/M}$$

$$\cong \mathbb{R}q_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{X\leftarrow Y}|_{S_N^*X}) \overset{L}{\underset{p^{-1}\mathcal{P}_Y}{\otimes}} p^{-1}\mathcal{C}_N \qquad \cdots\cdots (3.1)$$

(但し $\omega_{N/M} = \mathcal{H}_N^d(\mathbb{C}_M)$)

ここで (3.1) の左辺は比較的見易いが，右辺は少し見辛いかも知れない。§1 の定式化に則して言えば，$\mathbb{R}g_* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{p^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{P}_{Y\to X} \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_M}{\otimes} \mathcal{M}|_{S_N^*X}, p^{-1}C_N)[-d]$ を考えていることに当るのであるが，そして実際 stalk はこの加群に一致するけれど，$\mathcal{P}^f_{Y\to X} \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_M}{\otimes} \mathcal{M}|_{S_N^*X}$ は $p^{-1}\mathcal{P}^f_Y$-加群として連接的でない為，その難点を避けるべく (3.1) の右辺のような定式化が必要となる。従って $p^{-1}\mathcal{P}^f_Y$-加群としてでなく，その順像を取って $\mathcal{P}_Y$-加群として考えられる対象が現われる場合，即ち $g|_{S.S\,\mathcal{M}\cap S_N^*X} = t\circ p$，但し $t$ は $p(S.S.\mathcal{M}\cap S_N^*X)$ から $S_N^*M$ への写像，という分解が出来る時は，この $t$ を用いて (3.1) の右辺は

$$\mathbb{R}t_* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(p_*(\mathcal{P}_{Y\to X} \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_M}{\otimes} \mathcal{M}|_{S_N^*X}), C_N)[-d]$$

と見易い形に書き直せることを注意しておく。

定理 3.1 の証明を始めよう。

この場合も $C_{N/X}$ を中間にはさんで議論を行う。

即ち，証明は次の 2 段階に分けて行われる。

(I) $\mathcal{M}$ の $C_{N/X}$-解と $\mathcal{B}_M$-解を関係付ける，

即ち次の同型を確立する：

$$\mathbb{R}\Gamma_{S_N^*M}(\pi_{N/M}^{-1}\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M))^a \otimes \omega_{N/M} \xrightarrow{\sim}$$

$$\xrightarrow{\sim} R\pi_{*}\left(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, C_{N/X})\big|_{S_N^*X-\sqrt{-1}S^*M}\right) \quad \cdots\cdots (3.2)$$

(II) $\mathcal{M}$の $C_{N/X}$-解と $\mathcal{M}$の接方程式の $C_N$-解の関係を確立する。ただし，この時，最初に述べた連接性に関する問題を避ける為，次のような形で$\mathcal{M}$の接方程式の $C_N$-解との対応をつける。

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, C_{N/X}) \cong R\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{X\leftarrow Y}) \overset{L}{\underset{p^{-1}\mathcal{P}_Y}{\otimes}} p^{-1}C_N \quad \cdots\cdots (3.3)$$

ここで第一段階では$\mathcal{M}$の楕円性のみが，第二段階では $N$が$\mathcal{M}$に関して非特性的であることのみが用いられる。

§1の議論に比べて特に差の大きいのは，第二段階の証明故，まず(3.3)の証明から始めよう。

この場合 $C_{N/X}$ の性質の内，p. 1-9 で述べた性質，即ち $C_{N/X}$が "Cauchy-Riemann型"の方程式系の解層に($\dot{S}_Y^*X$外では)同型である，という事実が重要である。

実際，$\bar{z}_j u=0$ $(j=1,\cdots,d)$ なる方程式系は，$S_Y^*X$以外では Legendre 変換により $(\partial/\partial\bar{w}_j)u=0$ $(j=1,\cdots,d)$ という形に直すことができる。実際 $(z,\bar{z},t;\zeta,\bar{\zeta},\tau)$と$(w,\bar{w},s;\eta,\bar{\eta},\sigma)$の対応を母函数 $\Omega=$
$=\Omega(z,\bar{z},t;w,\bar{w},s)=t-s+\sum z_j w_j+\sum \bar{z}_j\bar{w}_j$

により与えればよい。(これを例えば $\Upsilon(\Omega)\, ds\, dw\, d\bar{w}$ なる核函数により"量子化"すれば，次の対応が得られる：

$$
\left\{
\begin{aligned}
z_j &\longleftrightarrow -\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial w_j}\\
\bar{z}_j &\longleftrightarrow -\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{w}_j}\\
t &\longleftrightarrow \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial w}, w\right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial \bar{w}}, \bar{w}\right\rangle + 1\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{-1} + s\\
\frac{\partial}{\partial z_j} &\longleftrightarrow w_j \frac{\partial}{\partial s}\\
\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} &\longleftrightarrow \bar{w}_j \frac{\partial}{\partial s}\\
\frac{\partial}{\partial t} &\longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial s}
\end{aligned}
\right.
$$

および

$$
\left\{
\begin{aligned}
w_j &\longleftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial z_j}\\
\bar{w}_j &\longleftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\\
s &\longleftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}\left(\left\langle z, \frac{\partial}{\partial z}\right\rangle + \left\langle \bar{z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right\rangle - 1\right) + t\\
\frac{\partial}{\partial w_j} &\longleftrightarrow -z_j \frac{\partial}{\partial t}\\
\frac{\partial}{\partial \bar{w}_j} &\longleftrightarrow -\bar{z}_j \frac{\partial}{\partial t}\\
\frac{\partial}{\partial s} &\longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}
\right.
$$

が具体的表示である。)

従って $S^*X$ でこのような"量子化された" Legendre 変換を行えば、$\mathcal{C}_{N/X}$-解とは実際に、正則パラメーターを持つ microfunction の層での解と思ってよい。従ってその複素変数に関して Cauchy の積分公式 etc. が自由に使えることになる。勿論、ここで $S^*_YX$ は除外されているから、そこでまず $N$ が $\mathcal{M}$ に関して非特性的であるという事実が必要となる。又、そのような接触変換により射影 $\rho$ がどのような写像に変るかを見なければならない。

まず "$N$ が $\mathcal{M}$ に関して非特性的" とはどういう事であったかを思い出しておこう。

一般に $\varphi: Y \longrightarrow X$ なる写像が与えられれば、次の2つの写像 $\rho = \rho_\varphi$ と $\varpi = \varpi_\varphi$ が自然に誘導される。

$$\begin{cases} \rho : P^*X \underset{X}{\times} Y - P^*_YX \longrightarrow P^*Y \\ \varpi : P^*X \underset{X}{\times} Y - P^*_YX \to P^*X \end{cases}$$

今 $\varphi$ が $\mathcal{M}$ に関して $V (\subset P^*Y)$ 上非特性的、とは、

($\mathcal{M}$ は $U \subset P^*X$ で定義されているとして)

$$\varpi^{-1} \operatorname{Supp} \mathcal{M} \cap \rho^{-1}(V) \longrightarrow V$$

が固有写像になること、であった。([S-K-K] Chap. II.

定義3.5.4）

この時 $\varpi^{-1}\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ 上 $\rho$は必然的に有限的になるのであった。

さて今 $S^*X$ で上述の Legendre 変換を行った時，(3.3)の両辺がどう変わるかを考えよう。

先に述べたように，この時 $f: X \to Y$ なる射影を定め，又，$L = f^{-1}(N)$ と定めれば $C_{N/X}$ は $f$の fiber に沿っての（$C_L$での）Cauchy-Riemann 系の解層に移る。即ち，$C_{N/X}$ は，この時

$$\tilde{C}_L \underset{\mathrm{def.}}{=} \mathcal{H}^d_{S^*_L X}(\pi_{L/X}^{-1}\mathcal{O}_X)^a \otimes \omega_N$$

に移る。

他方，$\mathcal{P}_{X\leftarrow Y}$ は 左$\mathcal{P}_X$-加群として

$$\mathcal{P}_X / (\mathcal{P}_X z_1 + \cdots + \mathcal{P}_X z_d)$$

と見なせるから，上の"量子化された" Legendre 変換により，これは

$$\mathcal{P}_X / \left(\mathcal{P}_X \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + \mathcal{P}_X \frac{\partial}{\partial z_d}\right)$$

なる左$\mathcal{P}_X$-加群に同型な加群に移る。

ところが，定義により，この左$\mathcal{P}_X$-加群は，$\mathcal{P}_{X \xrightarrow{f} Y}$ に他ならないから，(3.3)の右辺の最初

の部分は

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M},\ \mathcal{P}_{X \xrightarrow{f} Y})$$

に変換される。

他方 写像 $p:\ S^*_N X - S^*_Y X \longrightarrow S^*_N Y$

は明らかに $f$ に変換されるから、結局、(3.3)の右辺は

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M},\ \mathcal{P}_{X \xrightarrow{f} Y}) \overset{\mathbb{L}}{\underset{f^{-1}\mathcal{P}_Y}{\otimes}} f^{-1}C_N$$

に、上の"量子化変換"により、変換される。

従って $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M} \cap f^{-1}(N) \times_Y P^*Y \longrightarrow P^*Y$ が有限写像との仮定の下で(これが $Y$ が $\mathcal{M}$ について非特性的、という事実と(上の Legendre 変換の下に)同値であることは見易い。)次の同型(3.3')を示せば(3.3)が証明されたことになる。

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M},\ \tilde{C}_L) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M},\ \mathcal{P}_{X \to Y}) \overset{\mathbb{L}}{\underset{f^{-1}\mathcal{P}_Y}{\otimes}} f^{-1}C_N \qquad \cdots\cdots (3.3')$$

しかるに 通常通り induction により[註] pp. 3-7 bis 1 ~

これは、適当に写像さえ作れば、それが同型写像であることは、$d=1$ で証明すれば十分である。又、更に $\mathcal{M}$ の resolution を用いて、$\mathcal{M}$ が単独方程式の場合に証明すれば十分であることも通常通り。

又、仮定より、$f$ が $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ 上有限写像故、$f$ の fiber 方

向に問題を局所化すれば $f$ の fiber は一点であるとしてよい。従って $f$ による順像を考えて

$$\mathbb{R}f_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \tilde{C}_L) \cong \mathbb{R}f_*(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{P}_{X\to Y}) \overset{\mathbb{L}}{\underset{f^{-1}\mathcal{P}_Y}{\otimes}} f^{-1}C_N)$$

$$\cdots\cdots(3.4)$$

を証すればよい。即ち

$$\mathbb{R}f_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \tilde{C}_L) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(\mathbb{R}f_*(\mathcal{P}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{M}), C_N)[-d]$$

$$= \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_Y}(f_*(\mathcal{P}_{Y\leftarrow X} \otimes \mathcal{M}), C_N)[-d]$$

$$\cdots\cdots(3.4')$$

を証すればよい。

さて (3.3′) あるいは (3.4′) の同型を与えると期待される写像を構成しよう。

$\mathrm{Supp}\,\mathcal{M} \cap f^{-1}(N) \underset{Y}{\times} P^*Y \to P^*Y$ が有限写像故,

(特に $\mathrm{Supp}\,\mathcal{M}$ 上 $f$ が固有故)

$$\mathbb{R}f_*\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \tilde{C}_L) = \mathbb{R}f_!\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{P}_X}(\mathcal{M}, \tilde{C}_L)$$

ここで, $\tilde{C}_L$ と $C_N$ の関係を考えよう。

今 $Y = \{z \in X;\ z_1 = \cdots = z_d = 0\}$ と座標系を定めれば

$$\mathcal{P}_{Y\leftarrow X} = \mathcal{P}_X \Big/ \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\mathcal{P}_X + \cdots + \frac{\partial}{\partial z_d}\mathcal{P}_X\right)$$

従って $\mathcal{P}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{P}_X}{\otimes}} \tilde{C}_L$ を考えれば, これは, 部分 de Rham 系の $\tilde{C}_L$-解層のコホモロジー群に (d だけの index shift を

行えば）同型。即ち

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}}\tilde{C}_L)=\begin{cases}0 & k\neq -d\\ f^{-1}C_N & k=-d\end{cases}$$

従って

$$\mathbb{R}f_!\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\tilde{C}_L)$$

$$\longrightarrow \mathbb{R}f_!\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}}\mathcal{M},\ \mathcal{D}_{Y\leftarrow X}\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}}\tilde{C}_L)$$

$$=\mathbb{R}f_!\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}}\mathcal{M},\ f^{-1}C_N[d])$$

$$=\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathbb{R}f_!(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}}\mathcal{M}),\ \mathbb{R}f_!f^{-1}C_N[d])$$

$$\longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathbb{R}f_!(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}}\mathcal{M}),\ C_N[-d])$$

$\left(\because\quad \mathbb{R}f_!f_*C_N \xrightarrow{\ \exists\int\ } C_N[-2d]\right)$ （たとえば、

数学の歩み 15-1 (1970) p. 64 参照）.

このようにして

$$\mathbb{R}f_*\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\tilde{C}_L)$$

$$\longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathbb{R}f_!(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}}\mathcal{M}),\ C_N[-d])$$

なる標準的な写像が定義できたから、これが実は

同型であることを　$\mathcal{M}$を単独方程式，$d=1$として

証明すればよい。

ところが, $\mathcal{M} = \mathcal{P}/\mathcal{P}P$ とした時, (Yは Pについて非特性的故) Legendre 変換を行う以前には, その主要表象は $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{l} + \cdots\cdots$ という形であるとしてもよい。($Y=\{z\in X;\ z_1=0\}$ として) 従って, Legendre 変換を行った後には, $P$の主要表象は $z_1^{l} + \cdots\cdots$ という形になる。
従って (擬微分作用素に対する除法の定理を用いて) $Pu=0$ は $(z_1 - A(x', D_{z_1}, D_{x'}))v=0$ 但し, $A$ は大きさが $l\times l$ の 0階 (各成分が0階と仮定してよい) の擬微分作用素の行列, という形の方程式に $\mathcal{P}$-加群として同型である。

以下記号を簡単にするために $z_1 = z$, $x' = x$ と書き直しておく。

さて, 上の議論により, 最初から $P = z - A(x, D_z, D_x)$ と仮定して構わない。この時, $\mathcal{M}$ の "induced system" $\mathbb{R}f_!(\mathcal{P}_{Y\leftarrow X} \underset{\mathcal{P}_X}{\otimes} \mathcal{M})$ は $\mathcal{P}_Y^{l}$ 故, (3.4') が同型を示すには,

$$\mathcal{H}^k(f_*\tilde{C}_L^{l} \xrightarrow{P} f_*\tilde{C}_L^{l}) = \begin{cases} 0 & k\neq 1 \\ C_N^{l} & k=1 \end{cases}$$

を示せば十分。今, $Pv=0$ $v\in f_*\tilde{C}_L^{l}$ ならば, $z\neq 0$ で $P$は可逆, 又 $\tilde{C}_L$ は $z$について正

則な microfunction の層故, $U=0$。従って

$$\mathcal{H}^1(f_*\tilde{C}_L \xrightarrow{P} f_*\tilde{C}_L) = C_N^\ell$$

さえ示せば十分。

それには

$f_*\tilde{C}_L^\ell \longrightarrow f_*\tilde{C}_L^\ell$ なる作用素 $E$

$C_N^\ell \longrightarrow f_*\tilde{C}_L^\ell$ なる作用素 $\Phi$ 及び

$f_*\tilde{C}_L^\ell \to C_N^\ell$ なる作用素 $\Psi$

を

$$\begin{cases} \Psi\Phi = 1 & \cdots (3.5) \\ \Psi P = 0 & \cdots (3.6) \\ 1 = \Phi\Psi + PE & \cdots (3.7) \end{cases}$$

もし, このような $(E, \Phi, \Psi)$ が作れれば, (3.6) (3.7) 及び $P$ の単射性より $EP=1$ であることは明らか。即ち $E$ は $P$ の左逆になっていることに注意。

このような $(E, \Phi, \Psi)$ をどのようにして構成したらよいか, 小手調べに $P = z$ の場合を考えてみよう。

この時, $\tilde{C}_L$ が $z$ について正則な microfunction の層であることにより, $U(z, x) = U_0(0, x) + z\,U_1(z, x)$ という分解に応じて $\Psi(U) = U_0(0, x)$, $\Phi(v(x)) = v(x)$,

$$E(U(z, x)) = U_1(z, x) = \frac{U(z, x) - U(0, x)}{z}$$ と取れば

ないことは明らかである。Cauchy の積分公式により

$$\Psi(U) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{U(z,x)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint P^{-1}U(z,x)dz \quad \cdots (3.8)$$

であり，又 $E$ を $\oint K(z,z')U(z',x)dz'$ と積分表示すれば同様に

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-z'}-\frac{1}{z'}\right) = zK(z,z') = PK(z,z') \quad \cdots (3.9)$$

となっていることに注意しよう。

そこで，たとえば (3.8) にならって $\Psi$ を，その核函数が $|z|\gg 1$ でほぼ $P^{-1}$ となっている物として求めることを試みよう。

ここで非特性的の仮定により $\exists a$ に対し $|z|>a$ で $P$ は可逆。従って $P^{-1} = G(z,x,D_x) + D_z Q(z,x,D_z,D_x)$ という表示が $|z|>a$ で可能であることに注意しよう。更に，この時

$$\oint G(z,x,D_x)P(z,x,D_z,D_x)U(z,x)dz$$

$$= \oint U(z,x)dz - \oint D_z \underbrace{Q(z,x,D_z,D_x)P(z,x,D_z,D_x)}_{u(z)dz}$$

ここで $U$ は $z$ に関して正則故

$$\oint U(z,x)dz = 0$$

又，部分積分により $\oint D_z W(z,x)dz = 0$。（$W$ は $z\neq 0$

で正則とする。)

従って

$$\Psi(U(z,x)) = \frac{1}{2\pi i}\oint G(z,x,D_x)\,U(z,x)\,dz$$

と定めれば (3.6) は満たされる。

しかも

$$\frac{1}{2\pi i}\oint G(z,x,D_x)\,dz$$ は 高々0階の $(x,D_x)$

についての擬微分作用素であり，しかもその主要表象は

$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z-\alpha}=$ 1故 明らかに可逆。従ってその逆作用素を $\Phi(x,D_x)$

として定めれば，明らかに (3.5) も満たされる。

最後に (3.7) が満たされるように核函数 K を構成することを試みよう。 (3.7) が満たされるとすれば，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{1}{z-z'}U(z',x)\,dz' - \frac{1}{2\pi i}\Phi(x,D_x)\oint G(z',x,D_x)\times$$

$$\times U(z',x)\,dz' = \oint P(z,x,D_z,D_x)\,K\,U(z',x)\,dz'$$

が満たされなければならない。

しかるに， $\frac{1}{z-z'}$ を $z$ についての擬微分作用素と

みなして ($|z'|>a$, $z\neq z'$ において) 除法の定理を

適用すれば，($z'$ はパラメーターとみて) (3.9) と analogous に

$$\frac{1}{z-z'} = P(z, x, D_z, D_x)\, K(z, z', x, D_x) + Q(z', x, D_x) + R(z', x, D_z, D_x)\, D_z \quad \cdots\cdots (3.10)$$

という分解が一意に可能である。

ここでまず $Q(z', x, D_x) = \Phi(x, D_x)\, G(z', x, D_x)$ となっていることを示そう。実際 (3.10) の両辺に $G(z, x, D_x)$ を作用させてみれば

$$G(z, x, D_x)\frac{1}{z-z'} = G(z, x, D_x)\, P(z, x, D_z, D_x) \times$$

$$\times K(z, z', x, D_x) + G(z, x, D_x)\, Q(z', x, D_x)$$

$$+ G(z, x, D_x)\, R(z', x, D_z, D_x)\, D_z \quad \cdots (3.10')$$

この両辺を $\mu(x)$ に作用させ，更に $z$ について積分すれば (3.6) より，

$$\oint G(z, x, D_x)\, P(z, x, D_z, D_x)\, K(z, z', x, D_x)\, \mu\, dz$$

$$= 0$$

が成立するから．(3.10′) より

$$\frac{1}{2\pi i}\oint G(z, x, D_x)\frac{1}{z-z'}\mu(x)\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint G(z, x, D_x)\, Q(z', x, D_x)\, \mu(x)\, dz$$

従って

$$G(z', x, D_x)\, \mu(x) = \Phi^{-1}(x, D_x)\, Q(z', x, D_x)\, \mu(x)$$

が任意の $\mu(x)$ に対して成立する。ここで両辺は $z'$ に正則に依存するから

$$\Phi(x, D_x)\ G(z', x, D_x) = \Theta(z', x, D_x) \quad \cdots (3.11)$$

が成立しなければならない。（∵ この両辺は $z'$ を正則なパラメーターとして含む擬微分作用素）

この事実に注意して，Kを核函数とする作用素 $E$ を定めれば，(3.7) も満たされると期待される。

実際，(3.10)，(3.11) により

$$U(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z - z'} U(z', x)\, dz'$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint (P K(z, z', x, D_x)\ U(z', x)\, dz'$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint \Phi(x, D_x)\ G(z', x, D_x)\ U(z', x)\, dz'$$

$$= (PE + \Phi\Psi)(U)$$

となるから (3.7) も満たされる。

このようにして，(3.5)～(3.7) を満たす所要の作用素 $(E, \Phi, \Psi)$ が求められた。

以上により，(3.4') が証明され（$d = 1$，$\mathcal{M} = \mathcal{P}/\mathcal{P}P$ の時に）結局，(3.3) が一般に証明されたことになる。ここで，(3.3) の証明においては，Yが $\mathcal{M}$ に関して非特性的

であることしか用いられなかったこと，又，$\mathcal{M}$ は $\mathcal{D}^f$-加群でなくてもよい（一般の $\mathcal{D}^f$-加群でよい）ということを強調しておこう。

次に(3.2)の証明に入ろう。今度は，$\mathcal{M}$ が楕円型であることが本質的である。（その代わり，$Y$ が $\mathcal{M}$ に関して非特性的である必要はない。$Y$ の余次元が1より大の時は，楕円性と非特性的という事実の間には何も関係が無いことに注意。）

この時 補題 1.5, 1.6 と類似した次の補題に注意しよう。

補題 3.2

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\Gamma_{S_N^*M}(\pi_{N/M}^{-1}\mathcal{A}_M)^a \otimes \omega_{N/M} \arrow[d] & \mathbb{R}g_!(C_{N/X}|_{S_N^*X-\sqrt{-1}S^*M}) \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathbb{R}\Gamma_{S_N^*M}(\pi_{N/M}^{-1}\mathcal{B}_M)^a \otimes \omega_{N/M} \arrow[r] & \mathbb{R}g_*(C_{N/X}|_{S_N^*X-\sqrt{-1}S^*M})
\end{tikzcd}$$

これにより

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\Gamma_{S_N^*M}(\pi_{N/M}^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{A}_M))^a \otimes \omega_{N/M} \arrow[d, "i", "\wr"'] & \mathbb{R}g_!(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, C_{N/X})|_{S_N^*X-\sqrt{-1}S^*M}) \arrow[l, "p_1"'] \arrow[d, "\wr j"] \\
\mathbb{R}\Gamma_{S_N^*M}(\pi_{N/M}^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M},\mathcal{B}_M))^a \otimes \omega_{N/M} \arrow[r, "p_2"] & \mathbb{R}g_*(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, C_{N/X})|_{S_N^*X-\sqrt{-1}S^*M})
\end{tikzcd}$$

ここで $\tau$ が閉型写像であるのは楕円性による。又、楕円性より $\mathrm{Supp}(\mathcal{P}_X \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_M}{\otimes} \mathcal{M}) \to S_N^*M$ は固有写像となる故、$j$ も閉型。

更に、$\mathcal{M}$ は単独方程式と仮定しておいても構わないから この時 $\kappa_1$ が全射であること、即ち、$\mathcal{M}$ の実解析解が錘状複素近傍に迄伸びることは、容易。（角の処理に少し注意がいるけれど。）最も手短かには、実解析函数の楕円型作用素による特徴付け（Aronszajn, Komatsu, Kotaké-Narasimhan）を用いるのがよい。（たとえば [Ko] 等参照。）

以上を合わせて、結局定理3.1が示されたことになる。

## 文　献


[B-G] : Baouendi, M.S. and Goulaouic, C. : Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math. 26 455 -475, 1973.

[K] : 柏原. 偏微分方程式系の代数的研究, 東大, 1971 修士論文

[$\tilde{K}$] Kawai, T. : Finite-dimensionality of cohomology groups attached to systems of linear differential equations. J. Math. Kyoto Univ. 13, 73-95, 1973. (秋月記念号)

[Ko] Komatsu, H. : Resolution by hyperfunctions of sheaves of solutions of linear differential equations with constant coefficients, Math. Ann. 176, 77-86, 1967.

[O] Oshima, T. : Singularities in contact geometry and degenerate pseudo-differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 21, 43-83, 1974.

[P] Palamodov, V.P. : Differential operators on the class of convergent power series and the Weierstraß auxiliary lemma, F. Anal its Appl. 2 58-69, 1968 (English tr. 235-244)

[Q] Quillen, D.G. : Formal properties of over-determined systems of linear differential equations, Thesis presented to Harvard Univ. '64.

[V] Verdier, J.L. : Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts, Sém. Bourbaki, 300-01 ~ 300-13, 1965/66

[S-K-K] Sato, M., T. Kawai and M. Kashiwara ; Microfunctions and pseudo-differential equations. Springer Lecture Note No 287, pp. 265-529. (1973).

[K-K-O] Kashiwara, M., T. Kawai and T. Oshima : Structure of cohomology groups whose coefficients are microfunction solution sheaves of systems of pseudo-differential equations with multiple characteristics I., II. To appear in Proc. Japan Acad.